УДК 517.925 **Шварциан для многомерных диффеоморфизмов, потоков и циклов.**

Н.А. Якушкин.
Обнинский Государственный Технический Университет.

Введение: Данная работа посвящена построению многомерного аналога производной Шварца:

$$sh(f(x)) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)^2$$

Интерес к производной Шварца обусловлен тем, что в [5], а также частично в [2] были раскрыты интересные свойства диффеоморфизмов отрезка в себя с отрицательным шварцианом. Стало известно о связи шварциана отображения и тех коэффициентов нормальных форм, которые обуславливают мягкость или жесткость бифуркации потери устойчивости неподвижной точки. Неподвижная точка z теряет устойчивость мягко, если $sh(f(z)) < 0$, жестко, если - $sh(f(z)) > 0$. Случай когда $sh(f(z)) = 0$ требует более детального анализа. Таким образом вычисление шварциана, в случае когда он отличен от нуля, избавляет от работы с нормальными формами. Возникла задача об обобщении шварциана на многомерные диффеоморфизмы и потоки. Решение данной задачи, начатое в [1] и завершенное в данной работе, позволило легко классифицировать бифуркации потери устойчивости неподвижных точек и циклов, на мягкие или жесткие.

Необходимые сведенья. В работе используются следующие понятия.

1) Полутезнор вида (m,k) - объект $T^{i_1..i_m}_{j_1..j_k}$ определяемый, как тезнор набором координат, но с другими правилами перехода от одной системы координат к другой. Для нас будут важны операции суммирования - +, тезнорного произведения – $\otimes$, свертки - *.

2) Для матрицы M и ее собственного числа λ мы будем определять левый и правый собственные векторы: $LM = \lambda L,\ M\upsilon = \lambda\upsilon$. При вычислении шварциана для диффеоморфизма и потока векторы L, υ, для цикла векторы $L(0), \upsilon(0)$ нормируются соответственно так что: $(L,\upsilon) = 1$ или $(L(0),\upsilon(0)) = 1$.

3) Для вектора υ и комплексно сопряженного к нему вектора υ^* определим полутензор

$$W^{i,j,k,m}(\upsilon) = \left(\upsilon^i\right)^* \upsilon^j\ \upsilon^k \upsilon^m + \upsilon^i \left(\upsilon^j\right)^* \upsilon^k \upsilon^m + \upsilon^i \upsilon^j \left(\upsilon^k\right)^* \upsilon^m + \upsilon^i \upsilon^j \upsilon^k \left(\upsilon^m\right)^*$$

4) Определим производные диффеоморфизма F:

$$D^i_j(x) = \left\{\frac{\partial f^i(x)}{\partial x_j}\right\} \qquad f^i_{j,k}(x) = \left\{\frac{\partial^2 f^i(x)}{\partial x_j \partial x_k}\right\} \qquad f^i_{j,k,m}(x) = \left\{\frac{\partial^3 f^i(x)}{\partial x_j \partial x_k \partial x_m}\right\}.$$

Чтобы определить производные векторного поля, порождающего поток, надо иметь ввиду что векторное поле можно рассматривать как диффеоморфизм.

5) Пару $J = (L, B)$, где L-левый собственный вектор якобиана, B-матрица коэффициентов билинейной формы назовем 2-струей или просто струей. Обобщенный шварциан, вычисляется относительно струи, которая строится для потока или диффеоморфизма, по выбранному собственному значению.

Приложения к теории бифуркакций. Построенный шварциан позволяет классифицировать бифуркации потери устойчивости неподвижных точек фазового потока, диффеоморфизма, и предельных циклов. Во всех случаях бифуркация мягкая, если: $\mathrm{Re}(sh) < 0$ и жесткая при $\mathrm{Re}(sh) > 0$. Детальный анализ мягких и жестких бифуркаций, а также их приложений дан в [4].

Неподвижная точка x диффеоморфизма f устойчива, если собственные числа $\lambda_1..\lambda_n$ якобиана $D(x)$ этого диффеоморфизма таковы, что $\forall k\ \ |\lambda_k| < 1$. Устойчивость теряется при условии $\exists k|\ \ |\lambda_k| \geq 1$. Тогда, для вычисления шварциана в неподвижной точке, выбирают такое собственное число λ, что $|\lambda| = 1$.

Неподвижная точка x потока φ^t устойчива, если собственные числа $\lambda_1..\lambda_n$ якобиана поля порождающего поток таковы, что $\forall k\ \ \mathrm{Re}\,\lambda_k < 0$. Для изучения бифуркации потери устойчивости шварциан вычисляют для собственного числа λ такого, что $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$. Следует оговорить, что случай, когда устойчивость теряться при переходе собственного числа через 0 на комплексной плоскости, требует детального анализа методами нормальных форм.

Предельный цикл $x(t)$ $t \in [0,T]$ устойчив, когда для всех его мультипликаторов верно $\forall k\ |\mu_k| < 1$.

При бифуркации потери устойчивости цикла, всегда существует мультипликатор $\mu = 1$. Часть остальных мультипликаторов, может лежать на единичной комплексной окружности, и эти мультипликаторы будут определять тип бифуркации потери устойчивости цикла. Подробнее теория бифуркации изложена в [3]. Заметим, что для исследования типа бифуркации удвоения периода выбирают мультипликатор $\mu = -1$.

Шварциан для диффеоморфизмов. Пусть f - диффеоморфизм. Для вычисления шварциана в неподвижной точке нужно выбрать собственное число λ матрицы $D(x)$. Найти векторы L, υ, вычислить B из (1).

$$\lambda B_{p,q} = (L_r * f^r_{p,q}) + B_{s,t} * \left(D(x)^s_p \otimes D(x)^t_q\right) \qquad (1)$$

пусть

$$S_{p,q,r,s} = 3(B_{i,j} \otimes L_k - L_i \otimes B_{j,k}) * (f^i_{p,q}(x) \otimes D^j_r(x) \otimes D^k_s(x))$$

$$P_{p,q,r,s} = (L_i \otimes L_j) * \left(\left(f^i_{p,q,r}(x) \otimes D^j_s(x)\right) - \frac{3}{2}\left(f^i_{p,q} \otimes f^j_{r,s}\right) \right)$$

Тогда шварциан для диффеоморфизма имеет вид:

$$Sh(J, f(x)) = \left(P_{p,q,r,s} + S_{p,q,r,s}\right) * W^{p,q,r,s}(\upsilon)$$

Шварциан для потоков. Шварциан для потока в точке x определяется так:
Выбирается собственное число λ матрицы $D(x)$, находятся векторы L, υ. После чего находятся коэффициенты B.

$$\lambda B_{k,m} = L_i * f^i_{k,m} + B_{i,m} * D^i_k(x) + B_{k,j} * D^j_k(x) \qquad (2)$$

Пусть

$$U_{i,j,m,n} = (L_k \otimes L_l) * \left(f^k_{i,j,m}(x) \otimes \delta^l_n\right)$$

$$V_{m,n,s,t} = 3(B_{i,j} \otimes L_k - L_i \otimes B_{j,k}) * (f^i_{m,n}(x) \otimes \delta^j_s \otimes \delta^k_t)$$

Шварциан имеет вид:

$$Sh(J, \varphi^t(x)) = U_{i,j,m,n} * W^{i,j,m,n}(\upsilon) + V_{m,n,s,t} * W^{m,n,s,t}(\upsilon)$$

Шварциан для предельных циклов. Пусть $x(t)$ -предельный цикл периода T и $t \in [0;T]$. Тогда для этого цикла фундаментальная матрица $\Phi(T)$ определяется из уравнения $\frac{d}{dt}\Phi(t) = D(x(t))\Phi(t)$ с начальным условием $\Phi(0) = E$. $D(x(t))$ -якобиан поля, порождающего фазовый поток.

Пусть : $\mu_1..\mu_n$ - мультипликаторы, а $\lambda_k = \frac{Ln\mu_k}{T}$ -характеристические показатели. Вычисление шварциана цикла следующее: Выбираем мультипликатор μ. L, υ, B -функции времени. Находим собственные векторы $L(0), \upsilon(0)$ матрицы $\Phi(T)$, а $B(0)$ находим по формуле (2). Для $L(t)$, $\upsilon(t)$, $B(t)$ верны уравнения:

$$\frac{d}{dt}\upsilon(t) = D(x(t))\upsilon(t) \quad (3) \qquad \frac{d}{dt}L(t) = -L(t)D(x(t)) \qquad (4)$$

$$\frac{d}{dt}B_{ij} = \lambda B_{ij} - B_{k,m} * \left(D^k_i(x(t)) \otimes \delta^m_j + D^m_j(x(t)) \otimes \delta^k_i\right) \qquad (5)$$

Таким образом, определяется струя $J(t) = (L(t), B(t))$. Шварциан для цикла имеет вид:

$$Sh(x(t)) = \int_0^T Sh(J(t), \varphi^t)dt .$$

Литература.

[1] Сатаев Е.А. Производная Шварца для диффеоморфизмов и потоков в R^n.//УМН 1987 т.42(2) с.241-242.
[2] Сатаев Е.А О преобразованиях, близких к преобразованиям отрезка//Методы качественной теории дифференциальных уравнений Межвузовский сборник. Горький 1985.
[3] Арнольд В.И, Афраймович В.С, Ильяшенко Ю.С, Шильников Л.П. Теория бифуркаций//Динамические системы-5. Итоги современной науки и техники. ВИНИТИ 1986.
[4] Баутин Н.Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости . Наука 1984.
[5] Singer. D. Stable orbits and bifurcations of maps on the interval. SIAM Journal of Applied math. 1978 36 №4 pp 260-267

Личная страничка автора:www.yakushkin.obninsk.ru